

Xosmas matritsadan m-darajali ildizni chiqarish.

Oltinbekova Munira Ilhomjon qizi

Jizzax davlat pedagogika instituti talabasi.

Annotatsiya. Ushbu maqolada xosmas matritsadan m-darajali ildiz chiqarish masalasi ko'rib o'tilgan.

Аннотация. В данной статье обсуждается проблема извлечения корня m-го уровня из неспецифической матрицы.

Abstract. This paper discusses the problem of extracting the m-level root from a non-specific matrix.

Kalit so'zlar: matritsa, xosmas matritsa, xarakteristik son.

Ключевые слова: матрица, обратная матрица, характеристическое число.

Keywords: matrix, inverse matrix, characteristic number.

Ma'lumki hozirgi kunda matritsalar matematika, mexanika, nazariy fizika, nazariy elektrotexnika va boshqa ko'plab soxalarda keng qo'llanilmoqda.

Bizga

$$X^m = A \quad (1)$$

tenglamaga tenglama berilgan bo'lsin. Bu yerda A –berilgan n-tartibli matritsa, X –esa n tartibli izlanayotgan matritsa, m –berilgan butun musbat son.

Quyidagi

$$|A| \neq 0$$

holni ko'rib o'taylik. Bu holda A matritsaning xarakteristik sonlari 0 dan farqli yoki $|A|$ barcha xarakteristik sonlar ko'paytmasiga teng. A matritsaning elementar bo'luvchilarini

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_u)^{p_u} \quad (2)$$

deb belgilaylik va A matritsani quyidagicha

$$A = U\tilde{A}U^{-1} = U\{\lambda_1 E_1 + H_1, \dots, \lambda_u E_u + H_u\}U^{-1} \quad (3)$$

Jordan formasiga olib kelsak, izlanayotgan X matritsamizning xarakteristik sonlarini m -darajaga ko'tarish natijasida A matritsaning xarakteristik sonlari kelib chiqadi. Bunda X matritsaning xarakteristik sonlari ham 0 dan farqli. Shuning uchun bu xarakteristik sonlarning hosilasi

$$f(\lambda) = \lambda^m$$

0 ga teng bo'lmaydi. Lekin bu holda X matritsani m -darajaga ko'targanda X matritsaning elementar bo'luvchilari bo'linib ketmaydi. Yuqorida keltirib o'tilganlardan X matritsaning elementar bo'luvchilari

$$(\lambda - \xi_1)^{p_1}(\lambda - \xi_2)^{p_2} \dots (\lambda - \xi_u)^{p_u} \quad (4)$$

bo'ladi. Bu yerda agar λ_j had λ_j ($\xi_j = \sqrt[m]{\lambda_j}$; ($j = 1, 2, \dots, u$)) m -darajasining ildizlaridan biri bo'lsa, $\lambda_j^m = \lambda_j$ bo'ladi. Endi esa $\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j}$ ni quyidagicha aniqlaymiz. λ tekislikda 0 ni qabul qilmaydigan markazi λ_j nuqtada bo'lgan aylana olaylik. Bu aylanada $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyaning m ta alohida tarmoqlarga egamiz. Bu tarmoqlarni aylananing markazi bo'lgan λ_j nuqtadagi qiymatiga qarab bir-biridan ajratish mumkin. Izlanayotgan X matritsamiz ξ_j xarakteristik soni bilan λ_j nuqtadagi qiymati mos tushuvchi tarmoqni $\sqrt[m]{\lambda}$ orqali belgilaylik va $\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j}$ yoyiluvchi qator yordamida matritsadan funksiyani aniqlaylik.

$$\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j} = \lambda_j^{\frac{1}{m}} E_j + \frac{1}{m} \lambda_j^{\frac{1}{m}-1} H_j + \frac{1}{2!} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \lambda_j^{\frac{1}{m}-2} H_j^2 + \dots \quad (5)$$

λ_j nuqtada qaralayotgan $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyaning hosilasi 0 dan farqli, bundan esa (5) matritsa faqat bitta elementar bo'luvchiga ega

$$(\lambda - \xi_j)^{p_j}, \quad E_j = \sqrt[m]{\lambda_j} (j = 1, 2, \dots, u).$$

Bu yerda $E_j = E^{(p_j)}$, $H_j = H^{(p_j)}$ ($j = 1, 2, \dots, u$). Bu yerdan ko`rinib turibdiki

$$(\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u})$$

kvazidiagonal matritsa, X izlanayotgan matritsa kabi xuddi shunday (4) elementar bo`luvchilarga ega bo`ladi. Shuning uchun quyidagicha T xosmas matritsa

$$(T \neq 0) \quad X = T(\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u})T^{-1} \quad (6)$$

mavjud bo`ladi. T matritsani aniqlash uchun, ayniyatning ikkala tomoniga

$$(\sqrt[m]{\lambda})^m = \lambda$$

ni qo`yamiz. λ matritsaning o`rniga $\lambda_j E_j + H_j$ ($j = 1, 2, \dots, u$) qo`yib,

$$\left(\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j}\right)^m = \lambda_j E_j + H_j (j = 1, 2, \dots, u)$$

ga ega bo`lamiz. Endi esa (2.4.1) va (2.4.6) dan

$$A = T\{\lambda_1 E_1 + H_1, \lambda_2 E_2 + H_2, \dots, \lambda_u E_u + H_u\}T^{-1} \quad (7)$$

kelib chiqadi. (3) va (7) larni taqqoslab:

$$T = U X_{\tilde{A}} \quad (8)$$

ga ega bo`lamiz. Bu yerda $X_{\tilde{A}} - \tilde{A}$ bilan o`rin almashtirilgan ixtiyoriy xosmas matritsa. $X_{\tilde{A}}$ - matritsaning tuzilishi 2.1 mavzuda to`liq tushuntirib o`tilgandi.

(6) dagi T matritsaning o`rniga $U X_{\tilde{A}}$ ifodani qo`yib, (1) tenglamaning barcha yechimlarini qamrab oluvchi

$$X = U X_{\tilde{A}}\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u}\}X_{\tilde{A}}^{-1}U^{-1} \quad (9)$$

formulani olamiz. Bu formulaning o'ng tomonidagi ko'pqiymat diskret hamda kontinual xarakterga ega: bu ko'pqiymatning diskret xarakteri kvazidiagonal matritsaning turli xil chekli tarmoqlarida $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyaning turli panjaralarini tanlash hisobiga olinadi. Bunday holda $\lambda_j = \lambda_k$ bo'lganda ham $\sqrt[m]{\lambda}$ tarmoqning j va k diagonal panjaralari turli xil bo'lishi mumkin. Bu ko'pqiymatning kontinual xarakteriga $X_{\bar{A}}$ matritsada saqlanuvchi ixtiyoriy parametrlari hisobiga ega bo'lamiz. (1) tenglamaning barcha yechimlarini A matritsadan olingan m -daraja ildizlar deb ataymiz va $\sqrt[m]{A}$ kabi belgilaymiz. Umumiy holda $\sqrt[m]{AA}$ matritsadan olingan funksiya hisoblanmaydi va bu A matritsadan olingan ko'phad ko'rinishida berilmaydi.

Agar A matritsaning barcha elementar bo'luvchilari o'zaro tub bo'lsa, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ sonlar hammasi turli xil, unda $X_{\bar{A}}$ matritsa kvazidiagonal ko'rinishga

$$X_{\bar{A}} = \{X_1, X_2, \dots, X_u\} \quad (10)$$

ega bo'ladi. Bu yerda X_j matritsa $\lambda_j E_j + H_j$ bilan o'rin almashinuvchidir, shu sababli $\lambda_j E_j + H_j$, ($j = 1, 2, \dots, u$) istalgan funksiya bilan ham o'rin almashinuvchidir. Shuning uchun (10) formula qaralayotgan holda

$$X = U \left(\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u} \right) U^{-1}$$

ko'rinishni oladi. Bunday holda, agar A matritsaning elementar bo'luvchilari o'zaro tub bo'lsa, $X = \sqrt[m]{A}$ uchun formulada faqat diskret ko'pqiymat mavjuddir. Bu holda $\sqrt[m]{A}$ ning ixtiyoriy qiymatini A dan olingan ko'phad deb tasavvur qilish mumkin.

1 –misol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dan

$$X^2 = A$$

tenglamaning barcha yechimlari, A ning barcha kvadrat ildizlarini topish talab qilinsin. Bu holda A matritsa Jordan formasiga ega bo`lgan bo`ladi. Shuning uchun (10) formulaga $A = \tilde{A}$, $U = E$ ni qo`yish mumkin. Bu holda $X_{\tilde{A}}$ matritsa

$$X_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix}$$

kabi ko`rinishda bo`ladi. Bu yerda a, b, c, d, e – ixtiyoriy parametrlar.

X ning barcha izlangan yechimlarini beruvchi (10) formula bu holda quyidagi ko`rinishni

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix}^{-1} \quad \varepsilon^2 = \eta^2 = 1 \quad (11)$$

qabul qiladi. (10) formuladagi X ni o`zgartirmay turib, $X_{\tilde{A}}$ ni $|X_{\tilde{A}}| = 1$ qiymatni beruvchi birorta skalyarga ko`paytirish mumkin. Bu holda bu $a^2 e = 1$ tenglikga olib keladi, bu yerdan esa $e = a^{-2}$ ligi kelib chiqadi. $X_{\tilde{A}}^{-1}$ matritsaning elementlarini hisoblaylik. Bu uchun $X_{\tilde{A}}$ matritsa matritsa koeffitsientlari bilan chiziqli almashtirishni yozib olaylik:

$$y_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3,$$

$$y_2 = ax_2,$$

$$y_3 = dx_2 + a^{-2}x_3.$$

Bu tenglamalar sistemasini x_1, x_2, x_3 ga bog`liq holda yechaylik. Unda $X_{\tilde{A}}^{-1}$ teskari matritsa bilan almashtirishga ega bo`lamiz:

$$x_1 = a^{-1}y_1 - (a^{-2}b - cd)y_2 - acy_3$$

$$x_2 = a^{-1}y_2$$

$$x_3 = -ady_2 + a^2y_3.$$

Bu yerdan esa

$$X_{\bar{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a^{-2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & cd - a^{-2}b & -ac \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -ad & a^2 \end{pmatrix}$$

ni topamiz.(11) formula

$$X = \begin{pmatrix} \varepsilon & (\varepsilon - \eta)acd + \frac{\varepsilon}{2} & a^2c(\eta - \varepsilon) \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon - \eta)da^{-1} & \eta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \varepsilon & (\varepsilon - \eta)v\omega + \frac{\varepsilon}{2} & (\eta - \varepsilon)v \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon - \eta)v & \eta \end{pmatrix} (v = a^2c; \omega = a^{-1}d) \quad (12)$$

ni beradi. Xning yechimini ikkita ixtiyoriy v va ω parametrlarga va ikkita ε va η ixtiyoriy belgilarga bog`liq.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati

1. Белман Р. В. Введение теории матриц. – М. , Наука, 1976.
2. Гельфонт И. М. Чизиили алгебрадан лекциялар. -Т. Олий ва шрта мактаб. 1964
3. Гантмахер Р. Теории матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
4. Груйич Л.Т., Мартинюк А.А., Риббенс – Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев.: Наука. думка, 1984. – 307 с.