# TO‘G‘RI TO‘RTBURCHAKLAR VA TRAPETSIYALAR UCHUN KVADRATUR FORMULALARINING ABSOLYUT XATOSINING BAHOSI

*Abduxakimov Saidaxmat Xazratqulovich*
*JDPU o‘qituvchisi*
*asaidahmat@mail.ru*
*Abduxakimova Maftuna G‘afur qizi*
*asaidahmat@mail.ru*
*JDPU 2-kurs magistranti*
*O‘sarov Elyor O‘rol o‘g‘li*
*JDPU 2-kurs magistranti*
*osarovelyor96@gmail.com*

**Annotatsiya.** Biz ushbu ishda aniq integralni hisoblashda qo‘llaniladigan kvadratur formulalari o‘rganilgan va bu kvadratur formulalarining absolyut xatosi baholangan.

**Аннотация.** В данной работе мы изучили квадратурные формулы, используемые при вычислении точного интеграла, и оценили абсолютную погрещность этих квадратурных формул.

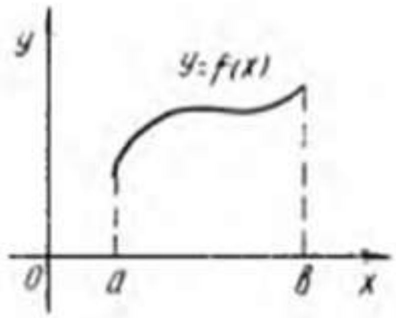
**1. Masalaning qo‘yilishi.** Kundalik hayotimizda uchraydigan ko‘p muhandislik masalalarini yechishda aniq integrallarni hisoblashga to‘g‘ri keladi. Faraz qilaylik, $\int_a^b f(x)dx$ ni hisoblash talab etilsin. Bu yerda $f(x)-[a,b]$ kesmada berilgan uzluksiz funksiya. Bu integralni hisoblashda quyidagi formula (Nyuton-Leybnis formulasi) qo‘llaniladi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

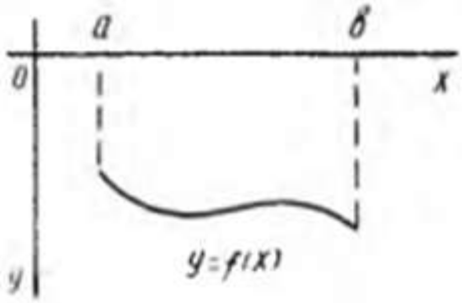
bu yerda $F(x)-$ boshlang‘ich funksiya. Agar boshlang‘ich funksiya $F(x)$ ni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo‘lmasa yoki integral ostidagi funksiya $f(x)$ jadval ko‘rinishda berilsa, u holda (1) formuladan foydalanish mumkin emas. Bu holda aniq integralni taqribiy formulalar orqali hisoblashga to‘g‘ri keladi. Bunday formulalarga kvadratur formulalar deyiladi.

Bunday formulalarni keltirib chiqarish uchun aniq integralning geometrik ma’nosini bilmoq lozim.

Agar $[a,b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ ning qiymati son jihatdan $y = f(x)$ funksiyani grafigi hamda $x = a,\ x = b,$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan shakl figuraning yuziga teng (1-rasm). Agar $[a,b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo‘lsa, integralning qiymati yuqorida keltirilgan shaklning teskari ishora bilan olingan yuziga teng (2-rasm).




1-rasm



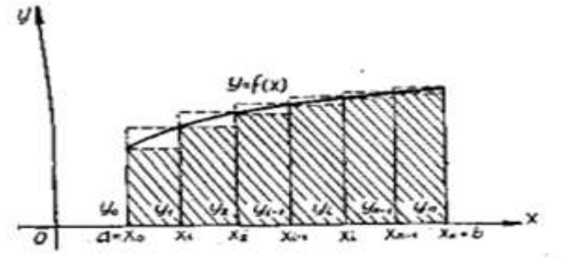

2-rasm

Quyida aniq integralni hisoblash uchun ba’zi kvadratur formulalar bilan tanishib chiqamiz.

**2. To‘g‘ri to‘rtburchaklar uchun kvadratur formula.** Faraz qilaylik, bizdan $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning taqribiy qiymatini topish talab etilsin. $x_0, x_2, x_3, ..., x_n$ nuqtalar yordamida $[a,b]$ kesmani $n$ ta teng bo‘lakchalarga bo‘lamiz. Har bir bo‘lakchaning uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$. Bo‘linish nuqtalari esa:

$$x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h,\ x_3 = a+3h, ..., x_{n-1} = a+(n-1)h,\ \ x_n = b.$$

Bu nuqtalarni tugun nuqtalar deb ataymiz. Funksiyaning tugun nuqtalaridagi qiymatlari $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ bo‘lsin. Bular $y_0 = f(a),\ y_1 = f(x_1), ... y_n = f(b)$ larga teng bo‘ladi.



3-rasm

3-rasmdan ko‘rinadiki, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish uchun $[a,b]$ kesmani bo‘lish natijasida hosil bo‘lgan barcha to‘rtburchaklarning yuzini hisoblab, ularni jamlash kerak bo‘ladi. Albatta bu yuzachalarni hisoblashlarda ma’lum darajada xatoliklarga yo‘l qo‘yiladi (shtrixlangan yuzachalar). Bularni va aniq integralning geometrik ma’nosini hisobga olsak, quyidagini yozishimiz mumkin bo ‘ladi.

$$\int_a^b f(x)dx \approx hy_0 + hy_1 + hy_2 + ... + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) = h\sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k. \qquad (2)$$

Bu yerda to‘g‘ri to‘rtburchak yuzini hisoblashda uning chap tomon ordinatasi olindi. Agar o‘ng ordinatalarini olsak ham shunday formulaga ega bo‘lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx hy_1 + hy_2 + ... + hy_n = h(y_1 + y_2 + ... + y_n) = h\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k. \qquad (3)$$

Biz aniq integralni taqribiy hisoblashning to‘g‘ri to‘rtburchaklar uchun kvadratur formulasini hosil qildik.

(2) va (3) larni mos ravishda chap va o‘ng formulalar deyiladi. Agar 3-rasmga e’tibor bersak, (2) formula bilan integralning qiymati hisoblanganda integralning taqribiy qiymati aniq qiymatidan ma’lum darajada kamroq chiqadi, (3) yordamida hisoblanganda esa taqribiy qiymat aniq qiymatdan ma’lum darajada kattaroq chiqadi. Ya’ni (2) va (3) formulalar yordamida aniq integralning taqribiy qiymati

hisoblanganda bu formulalardan biri integralning aniq qiymatini kami bilan ifodalasa, ikkinchisi esa ko‘pi bilan ifodalaydi. 3-rasmdan ko‘rinadiki, (2) va (3) formulalarni qo‘llaganda yo‘l qo‘yiladigan xatolikni kamaytirish uchun bo‘linish nuqtalarini iloji boricha ko‘proq olish, ya’ni qadam $h$ ni tobora kichraytirish lozim bo‘ladi. Albatta, $h$ ni kichraytirish hisoblash jarayonining keskin o‘sishiga olib keladi. Bu narsadan xavotirga tushmasligimiz kerak, chunki butun hisoblash jarayoni EHM ga yuklanadi.

**1-lemma.** To‘g‘ri to‘rtburchaklar uchun kvadratur formulasinining absolyut xatosi $M_1 \cdot \frac{(b-a)^2}{4n}$ dan katta emas, bu yerda $M_1$, $|f'(x)|$ ning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

**Isbot.** Lemmani isbotlash uchun quyidagi belgilashlardan foydalanamiz $h = \frac{b-a}{n}$, $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $(k = 0,1,2,\dots,N)$ u holda

$$|R_n(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} f(x)dx - h\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} f(x)dx - hf(\xi_k)\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} [f(x) - f(\xi_k)]dx\right|,$$

bu yerda $\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} f(\xi_k)dx = hf(\xi_k).$

Integral ostidagi ifodaga Lagranj teoremasini qo‘llash va $|f'(x)| \le M_1$ ni hisobga olgan holda quyidagini olamiz

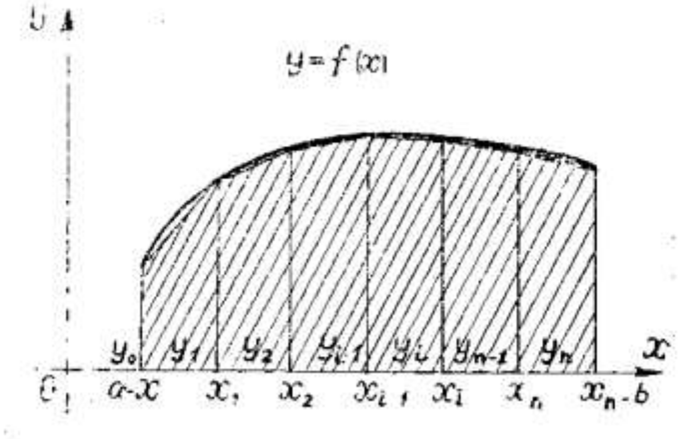
$$|R_n(f)| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} (f'(\theta_k)(x-\xi_k))dx\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} |f'(\theta_k)||x-\xi_k|dx \le M_1\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} |x-\xi_k|dx,$$

bu yerda $\theta_k -$ nuqta $x$ va $\xi_k$ nuqtalar orasida yotadi. $x - \xi_k = t$ o‘zgaruvchini almashtirish orqali quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$|R_n(f)| \le M_1 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |t| dt = 2M_1 N \int_0^{\frac{h}{2}} t dt = 2M_1 N \frac{t^2}{2} \Big|_0^{h/2} = \frac{M_1 N h^2}{4} = \frac{M_1 N (b-a)^2}{4N^2} = \frac{M_1 (b-a)^2}{4N}$$

lemma to‘liq isbotlandi.

**3. Trapetsiyalar uchun kvadratur formulasi.** $[a,b]$ kesmani bo‘lishni avvalgidek qoldiramiz, lekin $h$ xususiy intervalga mos keluvchi chiziqning har bir yonini bu yonining chetki nuqtalarini tutashtiruvchi vatar bilan almashtiramiz. Bu berilgan egri chiziqli trapetsiyaning $n$ ta to‘g‘ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig‘indisi bilan almashtirilganini bildiradi (4-rasm)




4-rasm

Bunday figuraning yuzi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tuzilgan pog‘onali figuraning yuziga qaraganda ancha aniq ifodalashi geometrik jihatdan ravshandir.

Xususiy intervalda yasalgan har bir trapetsiyaning yuzi shu intervalda yasalgan tegishli to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzlari yig‘indisining yarmiga teng bo‘lgani uchun bu yuzalarni qo‘shib,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_i + \ldots + y_{n-1}\right) = h\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2}\right) \qquad (4)$$

ni hosil qilamiz. Bu trapetsiyalar uchun kvatratur formulasidir.

$n$ soni qancha katta bo‘lsa va $h = \dfrac{b-a}{n}$ bo‘linish qadami qanchalik kichik bo‘lsa, (4) formulaning o‘ng qismida yozilgan yig‘indi integralning qiymati shuncha aniqlik bilan beradi. Quyidagi lemmani isbotsiz keltiramiz.

**2-lemma.** Trapetsiyalar uchun kvadratur formulasinining absolyut xatosi $M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$ dan katta emas, bu yerda $M_2, \left| f^{''}(x) \right|$ ning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR**


1. Shohamidov Sh.Sh., Amaliy matematika unsurlari. Toshkent “Fan va texnologiya” 2004.
2. Soatov Yo. U. Oliy matematika, Toshkent “O‘qituvchi” 1992
3. Никольский С. М., К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, Успехи мат. Наук, т. V, вып. 2 (1950), 165-177.
4. Никольский С. М., Квадратурные формулы, Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1952, том 16, выпуск 2, 181-196.